

#1. 순열과 조합, 포함 배제

나정휘

<https://justicehui.github.io/>

순열과 조합

순열

- n 개의 원소 중 **중복 없이** k 개의 원소를 선택해서 “나열”하는 방법의 수
 - 첫 번째 자리에 올 수 있는 원소의 개수: n
 - 두 번째 자리에 올 수 있는 원소의 개수: $n - 1$
 - 세 번째 자리에 올 수 있는 원소의 개수: $n - 2$
 - ...
 - k 번째 자리에 올 수 있는 원소의 개수: $n - k + 1$
- k 개의 원소를 나열하는 방법의 수: $n \times (n - 1) \times (n - 2) \times \cdots \times (n - k + 1) = \frac{n!}{(n-k)!}$

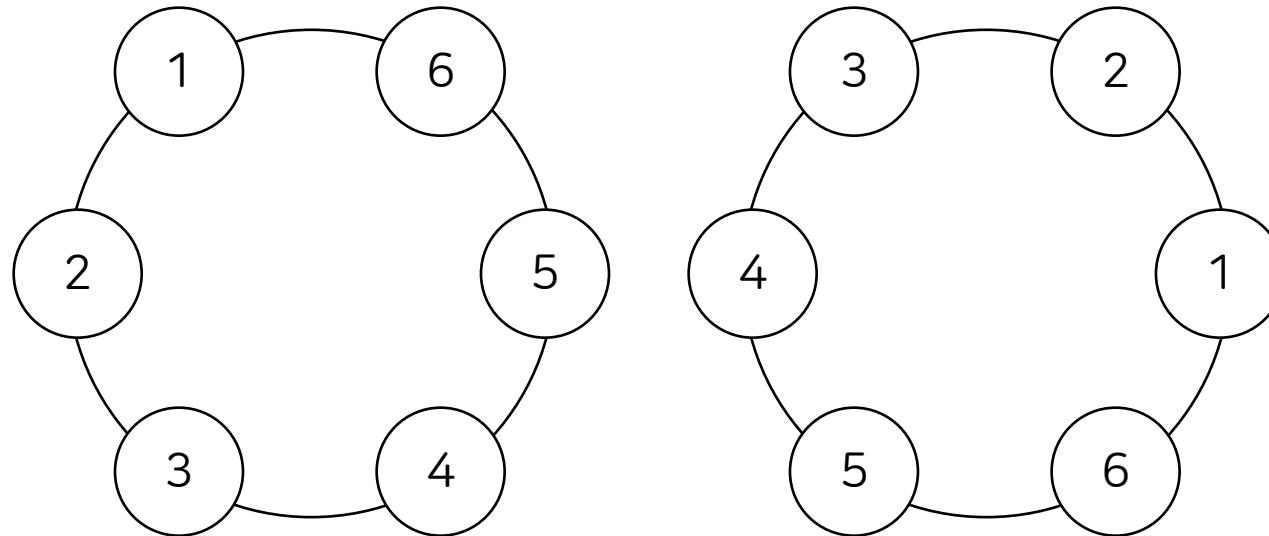
중복 순열

- n 개의 원소 중 **중복을 허용해서** k 개의 원소를 선택해서 “나열”하는 방법의 수: n^k
- k 개의 공을 n 개의 상자에 집어넣는 방법의 수라고 생각할 수도 있음

순열과 조합

원순열

- n 개의 원소를 한 번씩 사용해서 원형으로 나열하는 방법의 수
 - 회전해서 똑같이 만들 수 있는 나열은 같은 것으로 취급함
 - 즉, 아래 두 순열은 같은 순열
- n 번 원소가 맨 앞에 오도록 "정규화"를 거치면, 나머지 $n - 1$ 개의 원소는 마음대로 나열해도 됨
- 따라서 정답은 $(n - 1)!$



순열과 중복 순열

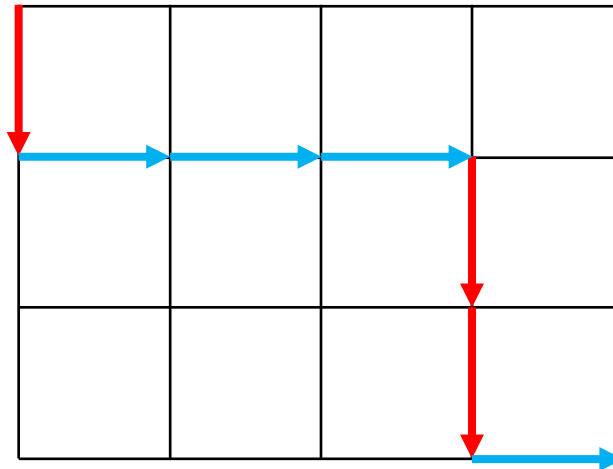
조합

- n 개의 원소 중 **중복 없이** k 개의 원소를 "선택"하는 방법의 수
 - $n = 5, k = 3$ 일 때 순열에서는 $(1,3,5), (1,5,3), (3,1,5), (3,5,1), (5,1,3), (5,3,1)$ 을 모두 따로 취급했지만
 - 조합에서는 이들을 하나의 경우로 생각해야 함
 - 즉, $k!$ 개씩 묶어서 세야 함
- 따라서 $\frac{n!}{(n-k)!} \times \frac{1}{k!} = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \binom{n}{k} = \binom{n}{n-k} = \frac{n!}{(n-k)!k!}$
- $1, 2, \dots, n$ 번 원소 중 k 개만 선택하는 방법의 수
 - $1, 2, \dots, n-1$ 번 원소 중 $k-1$ 개 선택한 뒤, n 번 원소를 선택
 - $1, 2, \dots, n-1$ 번 원소 중 k 개 선택한 뒤, n 번 원소를 선택하지 않음
- 따라서 $\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1}$

순열과 중복 순열

조합

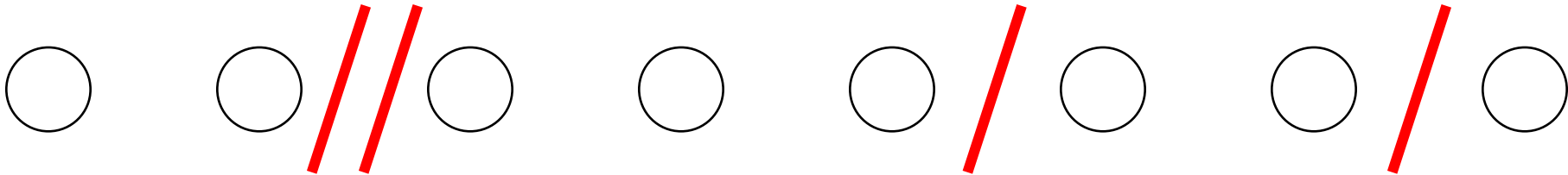
- $n \times m$ 격자에서 $(0,0)$ 에서 (n,m) 으로 가는 최단 경로의 개수는?
 - 최단 거리는 $n + m$
 - 총 $n + m$ 번의 이동 중 n 번은 아래로, 나머지는 오른쪽으로 이동해야 함
 - 따라서 경로의 개수는 $n + m$ 번의 이동 중 아래로 이동할 n 번의 이동을 선택하는 경우의 수와 같음
 - $\binom{n+m}{n} = \binom{n+m}{m} = \frac{(n+m)!}{n!m!}$
- $n = 3, m = 4$



순열과 중복 순열

중복 조합

- n 개의 원소 중 중복을 허용해서 k 개의 원소를 "선택"하는 방법의 수
- k 개의 공이 있고, 공과 공 사이에 $n - 1$ 개의 칸막이를 배치하는 상황을 생각하자.
 - 첫 번째 칸막이보다 왼쪽에 있는 공 개수 만큼 1번 원소 선택
 - 첫 번째와 두 번째 칸막이 사이에 있는 공 개수 만큼 2번 원소 선택
 - ...
 - $i - 1$ 번째와 i 번째 칸막이 사이에 있는 공 개수 만큼 i 번 원소 선택
 - $n - 1$ 번째 칸막이 오른쪽에 있는 공 개수 만큼 n 번 원소 선택
- $n = 5, k = 8$
 - 1번 원소 2개, 3번 원소 3개, 4번 원소 2개, 5번 원소 1개 선택

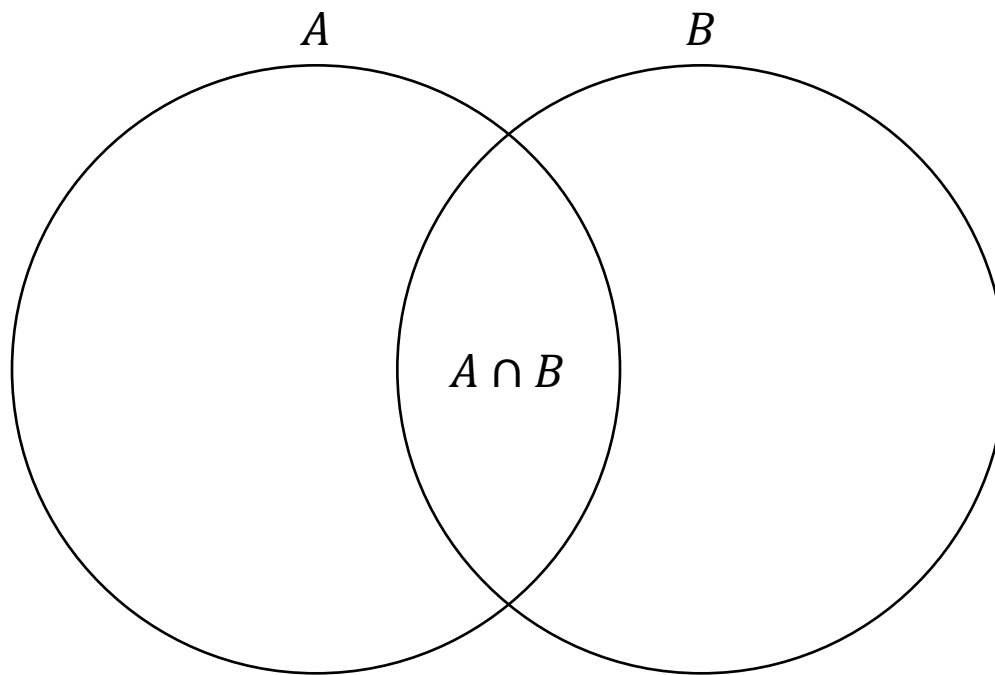


- 총 $n + k - 1$ 개의 자리 중 칸막이가 들어갈 $n - 1$ 개의 자리를 선택하는 방법의 수 = $\binom{n+k-1}{n-1} = \binom{n+k-1}{k}$

포함 배제의 원리

포함 배제의 원리

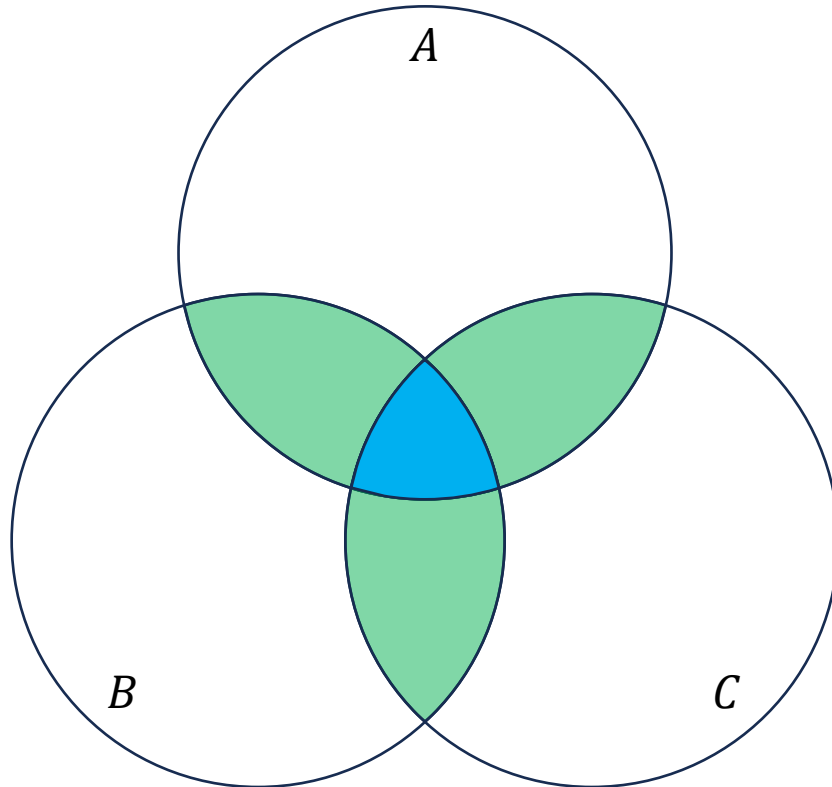
- 여러 개의 집합이 주어졌을 때, 합집합의 크기를 구하는 방법에 대해 생각해 보자.
- $|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$



포함 배제의 원리

포함 배제의 원리

- 여러 개의 집합이 주어졌을 때, 합집합의 크기를 구하는 방법에 대해 생각해 보자.
- $|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$
- $|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - (|A \cap B| + |B \cap C| + |C \cap A|) + |A \cap B \cap C|$



포함 배제의 원리

포함 배제의 원리

- 여러 개의 집합이 주어졌을 때, 합집합의 크기를 구하는 방법에 대해 생각해 보자.
- $|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$
- $|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - (|A \cap B| + |B \cap C| + |C \cap A|) + |A \cap B \cap C|$
- 규칙 찾기
 - 집합 홀수 개의 교집합 크기는 더하고
 - 집합 짝수 개의 교집합 크기는 빼면 됨
- 수식으로 표현하면 $|\bigcup_{i=1}^n A_i| = \sum_{I \subseteq [n]} (-1)^{|I|-1} |\bigcap_{i \in I} A_i|$